Subject: المحاضرة الثامنة
Date: 23/4/2018

6. معادلة فوكس:

إذا كانت جميع النقاط الشاذة للمعادلة التفاضلية:

$$W'' + p(Z)W' + q(Z)W = 0 \quad \ldots \boxed{1}$$

هي نقاط شاذة نظامية وكانت نقطة اللانهاية ($Z=\infty$) على الأكثر نقطة شاذة نظامية فإننا نسمي المعادلة [1] عندئذ معادلة فوكس

مثال: فالمعادلة التالية:

$$Z^2(1-Z)^2W'' + Z(1-Z^2)W' + (1-Z^2)W = 0 \quad \ldots \boxed{2}$$

هي معادلة فوكس لأن النقط الشاذة المنتهية لها هي:
[$Z=0$, $Z=1$ لاحظ ذلك] وكل من هاتين النقطتين هي نقطة شاذة نظامية. اختبر ذلك.
أما $Z=\infty$ هي صفر من الرتبة الأولى لـ $p(Z)$
وهي صفر من الرتبة الثانية لـ $q(Z)$ (لاحظ ذلك)
[لاحظ ذلك بعد التقسيم على أمثال W'']
هي إذن نقطة شاذة نظامية أيضاً للمعادلة.

1-6. معادلة فوكس ذات نقطة شاذة واحدة:

عندما يكون للمعادلة [1] نقطة شاذة واحدة هي a بالفرض عندئذ يكون (بالتعريف) بالشكل:

$$\left[p(Z) = \frac{A}{Z-a}, \; q(Z) = \frac{B}{Z-a} + \frac{C}{(Z-a)^2}\right] \quad \ldots \boxed{3}$$

واستناداً إلى تعريف $q(Z)$, $p(Z)$ في معادلة فوكس فإنه من الواجب أن يكون هنا $B=0$ [لتحقق شرط النقطة الشاذة النظامية]

وبالتالي المعادلة [1] في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي

$$w'' + \frac{A}{z-a}w' + \frac{C}{(z-a)^2}w = 0 \quad \ldots [4]$$

وبما أنه ينبغي أن تكون نقطة اللانهاية نقطة شاذة نظامية بالتعريف فيجب أن نحولها إلى نقطة عادية بالتي تكون للمعادلة نقطة شاذة واحدة فقط.

ولتحقيق ذلك يجب أن يتحقق الشرط: $zP(z) \to 2$, $z \to \infty$

وأن تكون نقطة اللانهاية بجعل z صفراً من الرتبة الرابعة على الأقل لـ $q(z)$ وفي هذه الحالة فإن $[A=2,\ C=0]$ والمعادلة تأخذ الشكل التالي: $w'' + \frac{2}{z-a}w' = 0$ وهي معادلة فوكس ذات نقطة شاذة نظامية واحدة.

وحل هذه المعادلة هو $w = -\frac{c_1}{z-a} + c_2$ حيث c_2, c_1 ثابتات اختيارية

2.G معادلة فوكس بنقطتين شاذتين:

المعادلة السابقة [4] هي معادلة فوكس بنقطتين شاذتين هما $[z=\infty,\ z=a]$ وتكون من الشكل:

$$w'' + \frac{A}{z-a}w' + \frac{C}{(z-a)^2}w = 0 \quad \ldots [4]$$

هي معادلة أويلر

وتتحول إلى معادلة ذات أمثال ثابتة وذلك بإجراء التحويل التالي $t = \ln(z-a)$.

3.G معادلة غوص، المعادلة فوق الهندسية:

تسمى معادلة فوكس بثلاث نقاط شاذة معادلة غوص أو المعادلة فوق الهندسية وهذه النقاط الشاذة النظامية هي $(0, 1, \infty)$ وهي من الشكل (معادلة غوص)

$$z(z-1)w'' + [-\gamma + (1+\alpha+\beta)z]w' + \alpha\beta w = 0 \quad \ldots [5]$$

Subject:
Date:

ولنحاول نحل هذه المعادلة في جوار النقطة الشاذة النظامية $z=0$
من أجل ذلك نفرض أن الحل من الشكل (حسب ما سبق)

$$\left[w = z^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\lambda}\right] ; c_0 \neq 0$$

نشتق هذه العلاقة الأخيرة مرتين بالنسبة لـ z ونعوض في (5)
فنحصل على العلاقة التالية:

$$(5) \longrightarrow (z^2 - z)\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n z^{n+\lambda-2} + [-\gamma + (1+\alpha+\beta) z] \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n z^{n+\lambda-1} + \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\lambda} = 0$$

ومنه مباشرة [بتوزيع المضاريب إلى داخل المجاميع]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n z^{n+\lambda} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n z^{n+\lambda-1}$$

$$-\gamma \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n z^{n+\lambda-1} + (1+\alpha+\beta) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n z^{n+\lambda} + \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\lambda} = 0$$

ومنه بالتجميع الحدود حسب قوى z:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (1+\alpha+\beta)(n+\lambda) + \alpha\beta\right] c_n z^{n+\lambda} +$$

$$- \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda)(n+\lambda-1) + \gamma(n+\lambda)\right] c_n z^{n+\lambda-1}}_{(\star)} = 0$$

والآن لإيجاد المعادلة المميزة للمشتق نجعل أمثال أقل قوة لـ z تساوي الصفر (عندما $n=0$) فنحصل على المعادلة:

$$\star \Rightarrow \lambda(\lambda-1) + \gamma\lambda = 0 \quad ; c_0 \neq 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \gamma\lambda = 0 \quad \text{إذا} \quad \lambda(\lambda - \gamma - 1) = 0$$

إذا $\lambda = 0$ أو $\lambda = 1-\alpha$ ، إذن الجذران هما $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1-\alpha \end{cases}$

[في حال الفرق بين λ_1 , λ_2 ليس عدداً صحيحاً]

ولإيجاد القانون التدريجي نبدل في المجموع الثاني (A) كل n بـ $(n+1)$
فنحصل من جديد:

Subject:

Date:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1)+(1+\alpha+\beta)(n+\lambda)+\alpha\beta\right]c_n z^{n+\lambda} +$$

$$-\sum_{n=-1}^{\infty}\left[(n+\lambda+1)(n+\lambda)+\gamma(n+\lambda+1)\right]c_{n+1} z^{n+\lambda}=0$$

وبالمطابقة وجعل أمثال $z^{n+\lambda}$ مساوية للصفر نجد

$$c_{n+1}=\frac{(n+\lambda+\alpha)(n+\lambda+\beta)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda+\gamma)} \quad (I) \; ; \forall n \geq 0$$

ملاحظة: بينما $n=-1$ يمكن إهماله لأنه موجود في المعادلة المميزة المتقدمة.

الآن من أجل $\lambda_1=0$ نجد الدستور التراجعي الموافق بالشكل:

$$(I) \Rightarrow c_{n+1}=\frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)}c_n \; ; \forall n \geq 0$$

وبالتالي نحسب الثوابت كما يلي ونستخلص الدستور التراجعي كالآتي:

$$n=0 \Rightarrow c_1=\frac{\alpha\beta}{\gamma}c_0$$

$$n=1 \Rightarrow c_2=\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2\gamma(\gamma+1)}c_0$$

وهكذا

$$n=n-1 \Rightarrow c_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1.2\cdots n\,.\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}c_0$$

ومنه بالتالي:

$$\boxed{c_n=\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,(\gamma)_n}c_0}$$

حيث

$$(\alpha)_n=\alpha.(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$
$$(\beta)_n=\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)$$

Subject:
Date:

$$(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)$$

و γ لا يساوي الصفر أو أي عدد صحيح سالب وبالتالي إذا أوجدنا الحل الموافق لـ $\lambda_1=0$ (الجذر الأول) نحصل على الشكل

$$W_1 = z^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \Rightarrow W_1 = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \ldots + \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(\gamma)_n} z^n \ldots \quad (*)'$$

ونرمز للطرف الأيمن بـ $(*')$ $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ ويسمى ... ومن أجل $\lambda_2 = 1-\gamma$ نجد أن الحل الثاني التدريجي الموافق هو

$$(T) \Rightarrow c_{n+1} = \frac{(1-\gamma+n+\alpha)(1-\gamma+n+\beta)}{(n+1)(n+2-\gamma)} c_n \; ; \; \forall n \geq 0$$

وبالتالي كما سبق نجد:

$$c_n = \frac{(\alpha-\gamma+1)_n \cdot (\beta-\gamma+1)_n}{n!\,(2-\gamma)_n} c_0$$

ومنه يكون الحل الثاني للمعادلة (الجزء الثاني) بفرض أن γ لا يساوي أي عدد صحيح موجب أكبر من (2) هو:

$$W_2 = ~~F(\alpha,\beta,\gamma,z)~~ \; z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)$$

وأخيراً الحل العام للمعادلة بفرض أن γ لا يساوي أي عدد صحيح هو:

$$W = c_1 F(\alpha,\beta,\gamma,z) + c_2 z^{1-\gamma} (\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z)$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية.

7) معادلة لوجندر التفاضلية:

في الفقرة السابقة تم إيجاد حل معادلة غوص بفرض أن الفرق بين جذري المعادلة الدليلية لا يساوي أي عدد صحيح.
والآن سنوجد حل معادلة ما خاصة معادلة غوص ولكن لا يتحقق فيها هذا الشرط وهي معادلة لوجندر التفاضلية

[فيها الفرق = عدد صحيح]

Subject:

Date:

$(1-z^2)w'' - 2zw' + n(n+1)w = 0 \quad \ldots (1)$ حيث n عدد صحيح

بأن النقاط الشاذة لهذه المعادلة (1) هي $(1, -1, \infty)$ وجميعها نقاط شاذة نظامية أثبت ذلك.

ولتوجد الحل لهذه المعادلة (1) في جوار النقطة الشاذة النظامية $z=1$ من أجل ذلك نجري التحويل التالي:

نفرض أن: ★ $\boxed{z-1=-2t} \Leftarrow \frac{dz}{dt} = -2 \Leftarrow \frac{dt}{dz} = \frac{-1}{2}$

$(★) \Rightarrow z = 1-2t \Rightarrow z^2 = 1-4t+4t^2$

وكذلك يكون w', w'' كالتالي:

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = -\frac{1}{2} w'_t$$

$$w'' = \frac{1}{4} w''_{tt}$$

نعوض هذا في المعادلة (1) نجد:

$$\Rightarrow (4t-4t^2)\frac{1}{4}w'' - 2(1-2t)\left(\frac{-1}{2}\right)w' + n(n+1)w = 0$$

بالاختصار والضرب بـ -1 للمعادلة نجد:

$$t(t-1)w''_t + [-1+2t]w'_t - n(n+1)w = 0 \quad \ldots (2)$$

وهي معادلة تشبه السابقة، حيث بالمقارنة مع معادلة غوص نجد:

$$[z(z-1)w''_t + [-\gamma+(1+\gamma+\beta)z]w' + \alpha\beta w = 0] \quad \ldots (5)$$

نجد أن: $\gamma = 1, \beta = -n, \alpha = 1+n$

وبالتالي فالمعادلة (1) تقبل حل غوص من الشكل:

$$(★^1) \Rightarrow w_1 = F\left(1+n, -n, 1, \frac{1}{2}(1-z)\right)$$

وبما أن $0 = 1-\gamma$ في هذه الحالة فالمعادلة المميزة للشقق لها جذر مضاعف هو الصفر، ولإيجاد حل آخر للمعادلة (1) لوجود نقوم بإجراء التحويل التالي: $\boxed{w_2 = w_1 \cdot u}$ وهو حل ثاني حيث u دالة مجهولة ومطلوب تعيينها

Subject:

Date:

لتعيين u نشتق العلاقة الأخيرة مرتين بالنسبة لـ t ونعوض في المعادلة [2]

فنحصل على المعادلة: $\frac{du'}{u'} = -\frac{2dw_1}{w_1} - \frac{(1-2t)}{t-t^2} \Leftarrow \frac{u''}{u'} = \frac{-2w_1'}{w_1} - \frac{1-2t}{t-t^2}$

بتكامل العلاقة كتفاضلات تامة وجعل الثابت مساوياً للصفر نحصل على المعادلة.

ومن المكاملة ونزع اللوغاريتم من الطرفين: $u' = \frac{1}{w_1^2(t-t^2)}$

ولكن الدالة w_1: $w_1 = F(1+n, -n, 1, t)$ من $(*')$

وكما هو معلوم من $(*)$

$(*')$ من $\Rightarrow w_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{1}t + \dots$

$$w_1^2 = [1 - 2n(n+1)t + \dots]$$

ومنه

$$du = \frac{1 \cdot dt}{[1-2n(n+1)t+\dots](t-t^2)} \Rightarrow u = \int \frac{dt}{[1-2n(n+1)t+\dots](t-t^2)} + A_0$$

حيث A_0 مقدار ثابت ومنه الحل الثاني للمعادلة [1] هو:

$$w_2 = w_1 \cdot u = w_1 \int \frac{dt}{[1-2n(n+1)t+\dots](t-t^2)} + A_0$$

وهو حل مستقل عن الحل الأول w_1 و $t = (1-z)/2$

إذاً الحل العام لمعادلة لوجندر [1] في جوار النقطة الشاذة النظامية $z=1$ هو:

$$w = C_1 w_1 + C_2 w_2$$

حيث C_1, C_2 ثابتات اختيارية.

ملاحظة: من أجل إيجاد الحل لمعادلة لوجندر [1] في جوار النقطة الشاذة النظامية $z=-1$ هو أيضاً $w = A w_1 + B w_2$

وحيث A و B ثابتات اختيارية.